Abdelmajid Siai

Cahiers d'Analyse Math Spé

Cahier N°1
Espaces vectoriels normés

Mathématiques

Edilivre

Table des matières

PRÉFACE

Les **Cahiers** d'Analyse math Spé, en nombre de quatre constituent un **cours d'Analyse pour les classes préparatoires de mathématiques spéciales MP**, **PC**, **PSI**, **PT**. Ils ont pour objectif de fournir à l'étudiant un outil à la fois personnel, complet et pratique, d'où l'appellation cahiers pour signifier le caractère scolaire du manuel. Les exemples multiples suivis de beaucoup d'exercices et des problèmes tous corrigés d'une manière détaillée afin permettre de maitriser avec le moindre effort les différentes notions du programme et de les retrouver rapidement, au besoin, bénéficiant des outils de référence clairs : **une table de matière détaillée, un index propre pour chaque cahier et aussi les références croisées bien précises entre les différentes notions du cours : théorèmes, définitions, exemples et exercices**.

Les **théorèmes** importants colorés en rouge, dont le nombre total est autour d'une **centaine** sur tout le programme, sont d'un usage fréquent dans la résolution des problèmes et doivent souvent être mentionnés explicitement lors de leur application ou du moins implicitement, en précisant correctement les hypothèses qui mènent à la conclusion souhaitée.

Les autres théorèmes, les **propositions** et les **corollaires** ne doivent pas être interprétés comme étant de moindre importance, mais leur mémorisation est, à priori, acquise implicitement par la fréquence d'utilisation et la multiplicité des exemples et des exercices à l'initiative de l'étudiant lui même et suivant ses propres disponibilités, que ce soit à partir des exercices de ce cours, ou en classe ou d'ailleurs, au point qu'il serait superflu de les mentionner explicitement lors de leur application dans la résolution des problèmes.

Parmi les exercices corrigés, on trouve un certain nombre qui sont élémentaires, intitulés **exercices de cours**. Ils ont pour objectif de permettre aux étudiants des différentes filières une bonne assimilation du cours. Ils sont suivis d'une série d'**exercices supplémentaires** d'un intérêt et d'un niveau de difficulté variés.

La plupart des **problèmes** qui suivent, quoique souvent élémentaires et relativement courts dans les premiers chapitres, mais de plus en plus nombreux et consistants dans les chapitres d'après, visent un apprentissage progressif avec les difficultés mathématiques et constituent des sujets de synthèse dans le style de ceux des concours d'entrée aux grandes écoles, plus axés vers le programme d'analyse, mais faisant souvent appel à des outils d'algèbre, dont on rappelle au besoin les résultats nécessaires.

L'ensemble de ces cours, exercices et problèmes constitue en lui même une synthèse du travail d'enseignement pendant de longues années dans les classes préparatoires à l'IPEIN depuis 1986 jusqu'à l'année 2012.

Les cahiers sont répartis comme suit :

Cahier N°1 : Espaces Vectoriels Normés, qui constitue l'objet des deux chapitres qui suivent ce préambule.

Cahier N°2 : Suites et Séries.

Cahier N°3 : Fonctions d'une Variable Réelle, Dérivation, Intégration.

Cahier N°4 : Séries Entières, Séries de Fourier, Équations Différentielles.

Je remercie l'Edition Edilivre et toutes les personnes, qui au cours des différentes correspondances, notamment Madame Églantine Cérède, pour toute leur disponibilité cordiale, qui a permis la diffusion de ce manuscrit à partir du format pdf.

J'ai essayé de prendre tout mon temps pour lire et relire ce premier cahier, j'espère n'avoir laissé échapper aucune erreur de n'importe quel genre que ce soit pour ce premier tirage. Je serais donc très reconnaissant envers toute personne qui formulerait des critiques constructives ou des suggestions.

Abdelmajid Siai

Chapitre 1

Normes, distances, suites

Pour toute la suite de ce cours, $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou celui des nombres complexes $\mathbb{C}$ et E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Sauf mention contraire, tous les ensembles considérés sont supposés non vides.

1.1 Normes

1.1.1 Généralités

Définition 1.1

On appelle ***norme*** dans E, toute ***application*** $N : E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie :
$(\mathbf{n}_1)$: $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E, \forall x \in E$.
$(\mathbf{n}_2)$: $N(\lambda.x) = |\lambda|\, N(x), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E$.
$(\mathbf{n}_3)$: $N(x+y) \leq N(x) + N(y), \forall x, y \in E$.

Le couple (E, N) est appelé espace vectoriel normé réel ou complexe suivant que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(\mathbf{n}_1)$ est appelé axiome de séparation, une application qui vérifie $(\mathbf{n}_2)$ est dite positivement homogène, l'inégalité $(\mathbf{n}_3)$ est appelée inégalité triangulaire.

Exemples 1.1 Normes usuelles dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

1/ Dans $\mathbb{R}$: Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $|x| = \max\{x, -x\}$, l'application valeur absolue $x \mapsto |x|$ est une norme dans $\mathbb{R}$.

En effet, $(\mathbf{n}_1)$ et $(\mathbf{n}_2)$ sont immédiates, il suffit d'établir $(\mathbf{n}_3)$. On a : $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \leq |x|^2 + |y|^2 + 2\,|x|\,|y| \\ &= (|x| + |y|)^2 . \end{aligned}$$

D'où : $|x+y| \leq |x| + |y|$.

2/ Dans $\mathbb{C}$, l'application module : $z = x+iy \longmapsto |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ est une norme dans $\mathbb{C}$.

En effet, $(\mathbf{n}_1)$ et $(\mathbf{n}_2)$ sont immédiates, montrons $(\mathbf{n}_3)$, c'est à dire

$$\forall z, z' \in \mathbb{C},\, z = x+iy,\, z' = x' + iy',\ |z+z'| \leq |z| + |z'|\,,$$

ou encore

$$\sqrt{(x+x')^2 + (y+y')^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x'^2+y'^2}.$$

Or, ceci est équivalent à :

$$(x+x')^2 + (y+y')^2 \leq x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 + 2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2},$$

ou encore :

$$xx' + yy' \leq \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2},$$

or cette dernière résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz relative au produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^2$:

$$|xx' + yy'| \leq \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2},$$

voir : Théorème 1.1, page 14.

Exemples 1.2 Normes N_1 et N_∞ dans $\mathbb{R}^2$

On connait déjà la norme euclidienne usuelle dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $N_2(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, on peut munir $\mathbb{R}^2$ de plusieurs autres normes dont les plus usuelles sont N_1 et N_∞.

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, N_1(x) = |x_1| + |x_2| \text{ et } N_\infty(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}.$$

Il est facile de prouver que N_1 est une norme dans $\mathbb{R}^2$, montrons que N_∞ est une norme dans $\mathbb{R}^2$.

$(\mathbf{n}_1)$: On a

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \max\{|x_1|, |x_2|\} = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (0, 0)\,.$$

$(\mathbf{n}_2)$: Montrons que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \text{ on a } N_\infty(\lambda.x) = |\lambda|\, N_\infty(x).$$

Or :

$$|\lambda x_i| = |\lambda|\,|x_i| \leq |\lambda| \max\{|x_1|, |x_2|\}\,,\ i = 1, 2$$

donc

$$\max\{|\lambda x_1|, |\lambda x_2|\} \leq |\lambda| \max\{|x_1|, |x_2|\}\,,$$

c'est-à-dire : $N_\infty(\lambda.x) \leq |\lambda|\, N_\infty(x)$.

Pour l'inégalité inverse, si $\lambda = 0$, on a égalité dans $(\mathbf{n}_2)$.

Si $\lambda \neq 0$, d'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned} \max\{|x_1|, |x_2|\} &= \max\left\{\left|\frac{1}{\lambda}\lambda x_1\right|, \left|\frac{1}{\lambda}\lambda x_2\right|\right\} \\ &\leq \left|\frac{1}{\lambda}\right| \max\{|\lambda x_1|, |\lambda x_2|\} \end{aligned}$$

donc

$$|\lambda| \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq \max\{|\lambda x_1|, |\lambda x_2|\}\,,$$

c'est-à-dire $|\lambda|\, N_\infty(x) \leq N_\infty(\lambda.x)$.

$(\mathbf{n}_3)$: Montrons que

$$N_\infty(x + y) \leq N_\infty(x) + N_\infty(y)\,,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

Si $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$, on a

$$\begin{aligned} |x_1 + y_1| &\leq |x_1| + |y_1| \leq \max\{|x_1|, |x_2|\} + \max\{|y_1|, |y_2|\} \\ &= N_\infty(x) + N_\infty(y)\,. \end{aligned}$$

De même

$$|x_2 + y_2| \leq N_\infty(x) + N_\infty(y)\,,$$

d'où :

$$N_\infty(x + y) = \max\{|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|\} \leq N_\infty(x) + N_\infty(y)\,.$$

Exercice 1.1 Dire si les applications suivantes constituent des normes dans $\mathbb{R}^2$.

$f(x,y) = |x+y|$, $g(x,y) = 2(|x|+|y|) - |x+y|$, $h(x,y) = |x+y| + |x-y|$.

Exemples 1.3 Normes N_1 et N_∞ dans $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$:

Pour un vecteur quelconque $x = (x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$, en plus de la norme euclidienne $N_2(x) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ qu'on introduit dans (1.4), page 17, la même démonstration s'applique pour prouver que les deux applications N_1 et N_∞ définies comme suit :

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \text{ et } N_\infty(x) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \tag{1.1}$$

sont des normes dans $\mathbb{R}^n$.

Notations 1.1 Dans la pratique, la notation la plus utilisée pour la norme d'un vecteur x de E est $\|x\|$ plutôt que $N(x)$. Les propriétés précédentes s'écrivent lors,

$$\boxed{\begin{array}{l} (\mathbf{n}_1) : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E, \forall x \in E. \\ (\mathbf{n}_2) : \|\lambda.x\| = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E. \\ (\mathbf{n}_3) : \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E. \end{array}}$$

On déduit de $(\mathbf{n}_3)$ l'inégalité qui suit :

$$\boxed{(\mathbf{n}_3') : |\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|, \forall x, y \in E.} \tag{1.2}$$

En effet,

$$\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|.$$

d'où

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|.$$

On obtient de même

$$-(\|x\| - \|y\|) = \|y\| - \|x\| \leq \|y-x\| = \|x-y\|.$$

D'où

$$|\|x\| - \|y\|| = \max\{\|x\| - \|y\|, -(\|x\| - \|y\|)\} \leq \|x-y\|.$$

Exemples 1.4 Normes sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$:

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$, on note

$$\begin{aligned}
&\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_n, \alpha_{n+1}, .., \alpha_{2n}, ..., \alpha_{n^2})\\
&\text{avec } a_{1,1} = \alpha_1, \quad , a_{1,n} = \alpha_n,\ a_{2,1} = \alpha_{n+1}, .., a_{2,n} = \alpha_{2n}, ..\\
&a_{n,1} = \alpha_{n^2-n+1}, ..., a_{n,n} = \alpha_{n^2}
\end{aligned}$$

Ceci revient à dénombrer les coefficients de la matrice A en la parcourant ligne par ligne. Soit

$$\varphi : [|1,n|]^2 \to \left[\left|1,n^2\right|\right],\ \varphi : (i,j) \mapsto k = \varphi(i,j) = (i-1)\,n + j,$$

φ est une application de $[|1,n|]^2$ dans $[|1,n^2|]$, il faut prouver qu'inversement, à chaque indice $k \in [|1,n^2|]$, on lui associe un couple unique $(i,j) \in [|1,n|]^2$, donc que φ est bijective, comme $[|1,n|]^2$ et $[|1,n^2|]$ sont deux ensembles finis de même cardinal égal à n^2, il suffit de prouver que φ est injective. $\forall\,(i,j), (i',j') \in [|1,n|]^2$, on a :

$$\varphi(i,j) = \varphi(i',j') \Leftrightarrow (i-1)\,n + j = (i'-1)\,n + j' \Leftrightarrow (i-i')\,n = j' - j$$

Si $i \ge i'$, par exemple, montrons que

$$\varphi(i,j) = \varphi(i',j') \Rightarrow i = i'.$$

Sinon $i - i' \ge 1$, or $j' > j' - j = (i-i')\,n \ge n$, d'où $j' > n$, ce qui est impossible. Donc $i = i'$ et $(i,j) = (i',j')$.

Il en résulte que

$$a_{i,j} = \alpha_k,\ \forall\,(i,j) \in [|1,n|]^2,\ k = (i-1)\,n + j \in \left[\left|1,n^2\right|\right],$$

Ainsi $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'identifie avec $\mathbb{R}^{n^2}$, on peut le munir des trois normes classiques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déduites de celles dans $\mathbb{R}^{n^2}$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$, $\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_{n^2})$ tel que $a_{i,j} = \alpha_{(i-1)n+j}$

$$\begin{aligned}
\|A\|_1 &= \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{k=1}^{n^2} |\alpha_k| = \|\alpha\|_1,\\
\|A\|_2 &= \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{n^2} |\alpha_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|\alpha\|_2 \qquad (1.3)\\
\|A\|_\infty &= \max_{1 \le i,j \le n} |a_{ij}| = \max_{1 \le k \le n^2} |\alpha_k|.
\end{aligned}$$

Exercice 1.2 *Normes dans l'espace $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à une variable et à coefficients réels.*

Si $P \in \mathbb{R}[X]$, $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \{0,...,n\}$, on note $\|P\|_1 = \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|$ et $\|P\|_\infty = \max\limits_{k\in\{0,1,..,n\}} |a_k|$, montrer que $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_\infty$ sont des normes dans $\mathbb{R}[X]$.

1.1.2 Norme associée à un produit scalaire

Espace préhilbertien réel

Définition 1.2

Un produit scalaire ϕ dans un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ est une ***forme bilinéaire symétrique définie positive***.
Autrement dit : ϕ est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie pour touts $x, y, z \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:
(1) $\phi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda\phi(x, z) + \mu\phi(y, z)$,
(2) $\phi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda\phi(x, y) + \mu\phi(x, z)$,
(3) $\phi(x, y) = \phi(y, x)$, $\forall x, y \in E$.
(4) $\phi(x, x) \geq 0$ et $\phi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.

Exemples 1.5

1/ Le produit ordinaire dans $\mathbb{R}$: $(x, y) \mapsto xy$ est un produit scalaire dans $\mathbb{R}$.

2/ Le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^2$ est défini par :

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, x.y = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Remarques 1.1 La définition précédente peut être simplifiée en remarquant ce qui suit :

1/ La propriété **(2)** résulte de **(1)** et **(3)** et pour établir **(1),** il suffit de prouver l'égalité

$$\phi(\lambda x + y, z) = \lambda\phi(x, z) + \phi(y, z), \forall x, y, z \in E, \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

2/ D'après **(1)**, on a

$$\phi(0_E, 0_E) = \phi(0_E + 0_E, 0_E) = \phi(0_E, 0_E) + \phi(0_E, 0_E),$$

donc $\phi(0_E, 0_E) = 0$, ainsi pour établir l'équivalence dans **(4)** dans la définition précédente, il suffit de prouver l'implication :

$$\forall x \in E : \phi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0_E.$$

On a donc la proposition :

Proposition 1.1

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, une application ϕ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire dans E si et seulement si elle vérifie :
(i) $\phi(\lambda x + y, z) = \lambda\phi(x,z) + \phi(y,z), \forall x,y,z \in E, \forall\lambda \in \mathbb{R}$.
(ii) $\phi(x,y) = \phi(y,x)$, $\forall x, y \in E$.
(iii) $\phi(x,x) \geq 0$, $\forall x \in E$ et $\phi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

Définition 1.3

Un espace vectoriel réel E muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ est appelé ***espace préhilbertien réel***. Si en plus E est de dimension finie, on dit que E est un ***espace euclidien***. Deux vecteurs x, y dans E sont orthogonaux pour $\langle\ ,\ \rangle$, s'ils vérifient $\langle x, y\rangle = 0$.

Espace préhilbertien complexe

Définition 1.4

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et ϕ une application de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ telle que : $\forall x, y, z \in E, \forall\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a :
(1) $\phi(\lambda x + \mu y, z) = \overline{\lambda}\phi(x,z) + \overline{\mu}\phi(y,z)$.
(2) $\phi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda\phi(x,y) + \mu\phi(x,z)$.
(3) $\phi(x,y) = \overline{\phi(y,x)}$, $\forall x, y \in E$.
(4) $\phi(x,x) \geq 0$ et $\phi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.
Une application ϕ qui vérifie **(1) et (2)** est dite anti--linéaire par rapport au premier vecteur et linéaire par rapport au deuxième, on dit que ϕ est une ***forme sesquilinéaire***. Une application ϕ qui vérifie **(1), (2), (3), (4)** est appelée ***forme hermitienne*** dans E ou ***produit scalaire complexe*** dans E.

Exemples 1.6

1/ L'application de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$: $(z, z') \longmapsto \overline{z} z'$ est un produit scalaire dans $\mathbb{C}$.

2/ Le produit scalaire usuel dans $\mathbb{C}^2$ est défini par :

$$\forall \left(z, z'\right) = \left(\left(z_1, z_2\right), \left(z'_1, z'_2\right)\right) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2,\ z.z' = \overline{z_1} z'_1 + \overline{z_2} z'_2$$

De même que dans le cas réel, on peut établir facilement la proposition :

Proposition 1.2

Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, une application ϕ de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ est un produit scalaire dans E si seulement si elle vérifie :
(i) $\phi(\lambda x + y, z) = \overline{\lambda} \phi(x, z) + \phi(y, z), \forall x, y, z \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
(ii) $\phi(x, y) = \overline{\phi(y, x)}$, $\forall x, y \in E$.
(iii) $\phi(x, x) \geq 0$, $\forall x \in E$ et $\phi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

Définition 1.5

Un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ muni d'une forme hermitienne ϕ est appelé ***espace préhilbertien complexe***. Si en plus E est de dimension finie, alors E est appelé ***espace hermitien***.

Inégalité de Cauchy Schwarz

Theorème 1.1

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel ou complexe, alors l'application : $x \in E \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ vérifie :
1/ L'***inégalité de Cauchy-Schwarz*** :
$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$, $\forall x, y \in E$.
2/ L'***inégalité triangulaire*** :
$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$.
3/ L'application de E dans $\mathbb{R}_+$: $x \mapsto \|x\|$ est une norme dans E, on dit que $\|\ \|$ est la ***norme dans E associée*** au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

Démonstration.

A-Cas réel

1/ $\forall x, y \in E$, $\forall t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\|tx + y\|^2 = \langle tx + y, tx + y\rangle = t^2 \|x\|^2 + 2t \langle x, y\rangle + \|y\|^2 \geq 0.$$

Si on note $a = \|x\|^2$, $b' = \langle x, y\rangle$, $c = \|y\|^2$, alors on a

$$at^2 + 2b't + c \geq 0, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Donc le discriminant réduit $\Delta' = b'^2 - ac$ vérifie $\Delta' \leq 0$. D'où :

$$\langle x, y\rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0, \text{ donc } \sqrt{\langle x, y\rangle^2} = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

2/ On a $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x, y\rangle$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| . \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 .$$

D'où l'inégalité triangulaire $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

3/ Les axiomes $(\mathbf{n}_1)$ et $(\mathbf{n}_2)$ résultent des propriétés du produit scalaire. En effet,

$$(\mathbf{n}_1) : \forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow \|x\|^2 = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_E.$$

$$(\mathbf{n}_2) : \ \|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x\rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda| \|x\| .$$

B-Cas complexe :

1/ On a $\langle x, y\rangle \in \mathbb{C}$, donc si $\theta = \arg(\langle x, y\rangle) \bmod (2\pi)$, alors

$$\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle| e^{i\theta} \text{ et } \langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle} = |\langle x, y\rangle| e^{-i\theta}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\left\|te^{i\theta}x + y\right\|^2 &= \left\langle te^{i\theta}x + y, te^{i\theta}x + y\right\rangle \\
&= t^2 \|x\|^2 + te^{-i\theta} \langle x, y\rangle + te^{i\theta} \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \\
&= t^2 \|x\|^2 + te^{-i\theta} |\langle x, y\rangle| e^{i\theta} + te^{i\theta} |\langle x, y\rangle| e^{-i\theta} + \|y\|^2 \\
&= t^2 \|x\|^2 + 2t |\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\Delta' = |\langle x, y\rangle|^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0.$$

2/ On a

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,|\langle x,y\rangle| \\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\|\,.\,\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2\,.
\end{aligned}$$

3/ De même que pour le cas réel $(\mathbf{n}_1)$ et $(\mathbf{n}_2)$ résultent encore des propriétés du produit scalaire. ■

Remarque 1.1 Les Exercices 1.24, page 44, et 1.25, page 44, donnent la condition nécessaire et suffisante pour avoir les cas d'égalité pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz et pour l'inégalité triangulaire. Plus précisément, on prouve que : $\forall\,(x,y) \in E^2$, si $x \neq 0_E$, alors on a :

$$|\langle x,y\rangle| = \|x\|\,.\,\|y\| \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{K} \text{ tel que : } y = \lambda.x$$

et

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que : } y = \lambda.x.$$

Définition 1.6

> **1/** Si $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace euclidien, alors la norme associée est appelée ***norme euclidienne*** associée au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.
> **2/** Si $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace hermitien, alors la norme associée est appelée ***norme hermitienne*** associée au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

Exemples de norme associée à un produit scalaire

Exemples 1.7

1/ a) Norme euclidienne usuelle dans $\mathbb{R}^2$.
On rappelle le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^2$.

$$\forall x = (x_1, x_2)\,, y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\ x.y = x_1y_1 + x_2y_2.$$

et norme associée, dite norme euclidienne usuelle dans $\mathbb{R}^2$.

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, N_2(x) = \|x\|_2 = \sqrt{x.x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

b) Autre exemple de norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$.

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \langle x, y\rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2.$$

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, N(x) = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2}.$$

On peut ainsi construire une infinité de normes euclidiennes, autres que la norme euclidienne usuelle.

2/ Norme hermitienne usuelle dans $\mathbb{C}^2$: Au produit scalaire usuel dans $\mathbb{C}^2$

$$z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, z' = (z_1', z_2') \in \mathbb{C}^2, \langle z, z'\rangle = \overline{z_1} z_1' + \overline{z_2} z_2',$$

on associe la norme :

$$N_2(z) = \|z\|_2 = \sqrt{\langle z, z\rangle} = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}, z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$$

3/ Norme euclidienne usuelle dans $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$: Le ***produit scalaire usuel dans*** $\mathbb{R}^n$ et **la *norme euclidienne usuelle dans*** $\mathbb{R}^n$ sont définis respectivement par :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \text{ et } N_2(x) = \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.4}$$

pour $x = (x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, .., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

4/ Norme hermitienne usuelle dans $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$: On définit de même le ***produit scalaire hermitien usuel dans*** $\mathbb{C}^n$ et la ***norme hermitienne usuelle dans*** $\mathbb{C}^n$ par :

$$\langle z, z'\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{z}_i z_i' \text{ et } N_2(z) = \|z\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.5}$$

pour $z = (z_1, .., z_n) \in \mathbb{C}^n$ et $z' = (z_1', .., z_n') \in \mathbb{C}^n$.

Famille orthogonale, famille orthonormale

Définition 1.7

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel ou complexe et $\|\ \|$ la norme associée au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$. Soit $I \subset \mathbb{N}$, et $\mathcal{F} = (e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E,(finie ou infinie).
1/ $\mathcal{F}$ est dite orthogonale si $\langle e_i, e_j\rangle = 0$, $\forall i, j \in I$, $i \neq j$.
2/ $\mathcal{F}$ est dite orthonormale si $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$, $\forall i, j \in I$, où $\delta_{i,j}$ est le Symbole de Kronecker $\delta_{i,j} = 0$, si $i \neq j$ et $\delta_{i,i} = 1$.
Autrement dit : $\forall i, j \in I$: $e_i \perp e_j$, si $i \neq j$ et $\|e_i\| = 1$.

Exemples 1.8

1/ La famille $\{(1,0)\,,\ (0,1)\}$ est orthonormale pour le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^2$ et non pour le produit scalaire défini par

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2,\ x, y \in \mathbb{R}^2, x = (x_1, x_2)\,, y = (y_1, y_2)$$

et $\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}(2,1)\,,\ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1)\right\}$ est orthonormale pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ mais ne l'est pas pour le produit scalaire usuel.

2/ La base canonique de $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est orthonormale pour le produit scalaire usuel dans $\mathbb{K}^n$.

Réciproquement, l'unique produit scalaire pour lequel la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est orthonormale est donné, suivant les cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, par (1.4) ou (1.5). En effet, dans le cas réel, si $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$, on a :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Dans le cas complexe, on reprend la même démonstration en remplaçant $x_i y_j$ par $\overline{z_i} z_j$.

Exercice 1.3 Dans chacun des cas qui suivent, dire si l'application $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire et dans l'affirmative, donner la norme associée.

1/ $\langle (x,y)\,, (x', y')\rangle = xx' + xy' + x'y + yy'$, $(x,y)\,, (x',y') \in \mathbb{R}^2$.

2/ $\langle (x,y),(x',y') \rangle = 2xx' - xy' - x'y + yy'$, $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$.
3/$\langle (x,y,z),(x',y',z') \rangle = 2xx' + yy' + zz' - (xy' + x'y)$,
$(x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$.

Norme de la convergence en moyenne quadratique dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.

La proposition suivante est indispensable pour la suite.

Proposition 1.3

Soit g une application ***continue et*** de ***signe constant*** de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, si l'intégrale $\int_a^b g(t)dt = 0$, alors g est ***identiquement nulle*** sur $[a,b]$.

Démonstration.

Supposons $g \geq 0$, par exemple, et posons $G(x) = \int_a^x g(t)dt$, alors $G'(x) = g(x) \geq 0$, d'où G est croissante et $G(a) = 0$. Il en résulte que pour tout $x \in [a,b]$, on a :

$$0 \leq G(x) \leq G(b) = G(b) - G(a) = \int_a^b g(t)dt = 0,$$

donc $G \equiv 0$ sur $[a,b]$ et par suite $G' = g \equiv 0$ sur $[a,b]$. ∎

Exemples 1.9

1/ Norme associée à un produit scalaire dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, ensemble des fonctions continues d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour $f,g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, on considère :

$$\langle f,g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt \text{ et } N_2(f) = \left[\int_a^b [f(t)]^2 .dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

$\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et l'application N_2 est une norme dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ appelée ***norme de la convergence en moyenne quadratique dans*** $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

En effet, le produit de deux fonctions continues sur $[a,b]$ est continu donc intégrable sur $[a,b]$, d'où $(f,g) \mapsto \langle f,g \rangle$ est une application de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \times \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.